Universidade Fernando Pessoa

Fundamentos de Matemática

Porto, 29 de janeiro de 2021

(Data da última atualização)

Responsável

Prof. Doutor Vasco Costa

Índice

Objetivos gerais 2

Introdução 2

1. Conjuntos e intervalos de números reais 3

1.1. Conjuntos 3

1.2. Representação na reta real 3

2. Equações e Inequações 4

2.1. Equações ou igualdades 4

2.2. Inequações ou desigualdades 4

3. Funções e equações 6

3.1. Funções e equações lineares 6

3.1.1. Equações lineares 6

3.1.2. Funções 6

3.2. Domínios e zeros de funções reais de variável real 8

3.2.1. Domínio de uma função 8

3.2.2. Zero de uma função 9

3.3. Funções polinomiais e funções quadráticas 9

3.4. Decomposição de polinómios 9

3.5. Funções exponencial e logarítmica 11

3.5.1. Função exponencial 11

3.5.2. Função logarítmica 13

Bibliografia 15

Objetivos gerais.

São objetivos gerais da formação em “Fundamentos de Matemática”:

- Compreender algumas noções e conceitos básicos da matemática;
- Tirar partido do cariz lógico, metódico e organizado da matemática;
- Criar ou reforçar bases sustentadas para a futura assimilação dos conhecimentos de matemática de nível superior.

Introdução.

Pretende-se abordar, relembrar ou aprofundar alguns conhecimentos básicos da matemática. Aborda-se os números reais, as equações e inequações, as funções e respectivos domínios e zeros, e um conjunto muito importante de funções que são os polinómios. Por último, duas importantes funções: exponencial e logarítmica.

Para além de necessária no processo de ingresso no ensino superior através do regime de maiores de 23 anos, esta aprendizagem é essencial como forma de relembrar conhecimentos básicos importantes para as unidades curriculares, em cursos superiores, “Matemática”, “Matemática I” e “Matemática II”.

Semear hoje para colher amanhã, é o lema desta formação.

Bom estudo!

1. Conjuntos e intervalos de números reais.

Na maioria dos exercícios, ir-se-á trabalhar com números reais. Mais concretamente, com o conjunto dos números reais, **R.**

1.1. Conjuntos.

Um conjunto pode ser encarado como uma coleção de objetos de qualquer natureza. Os objetos são os elementos do conjunto. Quando os elementos são números surge o conjunto de números.

São exemplos de conjuntos de números os seguintes:

- **Números Naturais** – soma do real 1 a si mesmo sucessivamente. O conjunto dos números naturais é designado por **N**. Ex. : 1, 2, 3,
- **Números Inteiros** – Zero e todos os números inteiros positivos e negativos; O conjunto dos números inteiros é designado por **Z.** Ex. : -3,-2,-1,0,1,2
- **Números Racionais** – Números que podem ser expressos como um quociente a/b, onde a e b são inteiros, b diferente de 0. O conjunto dos números racionais é designado por **Q**. Ex.: -3, -2, -1, 0, 2/3, 1, 5/4, 2
- **Número irracional** – Número real não racional (PI = 3,141592664 ; 1/3=0,3333333).

O **conjunto dos números reais** é representado pelo símbolo **R**, e engloba todos os números dos conjuntos anteriores.

1.2. Representação na reta real.

Os números reais podem ser representados sobre uma reta: **a reta real**. Nessa reta há um número (o zero) que separa os números negativos dos números positivos. Toda a reta representa o conjunto dos números reais. Se for escolhida apenas uma parte da reta isso representa um subconjunto de **R.** Estes subconjuntos de números reais podem também ser representados por **intervalos de números reais.**

Assim:

- **[1,2]** representa todos os números reais maiores e iguais a 1 e, simultaneamente, menores ou iguais a 2. Ou seja, todos os números reais compreendidos entre 1 e 2, incluindo o 1 e o 2. Pode-se também dizer que o intervalo é fechado em ambos os extremos;
- **[1,2[** representa todos os números reais maiores e iguais a 1 e, simultaneamente, menores que **2.** Ou seja, todos os números reais compreendidos entre 1 e 2, incluindo o 1 e excluindo o 2. Pode-se também dizer que os intervalo é fechado à esquerda e aberto à direita.

2. Equações e Inequações.

2.1. Equações ou igualdades.

Relembrando o conceito de **equação (igualdade).**

$$2x + 4 = 20$$

Este é um exemplo simples de uma equação contendo uma variável, mas que é extremamente útil e aparece na maioria das situações. Pode-se observar que, na escrita matemática de uma equação, existe:

- uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incógnitas. A letra x é a incógnita;
- um sinal de igualdade, denotado por =;
- uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda;
- uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita;

Esta equação pode ser resolvida originando a solução de x=8. Observe a leitura que pode ser efetuada:

- substituindo o x por 8, obtém-se 16+4=20, ou seja, 20=20. É uma igualdade verdadeira;
- o número real 8 é o único número, a única solução, que torna verdadeira a igualdade. Se for utilizado outro número real qualquer, a igualdade resultante será falsa;
- perante a visualização de uma equação como 2x+4=20, o aluno deverá colocar a si próprio a seguinte questão: qual ou quais os números reais que tornam verdadeira a igualdade? Para responder a esta questão, resolve-se a equação.

2.2. Inequações ou desigualdades.

Passando agora para as **inequações (desigualdades)**. Como identificar uma inequação?

As **desigualdades** de primeiro grau, (também denominadas inequações) são expressões matemáticas, com incógnitas, em que os termos (membro do lado esquerdo e o membro do lado direito) estão ligados por um dos quatro sinais:

- < *que significa* menor;
- > *que significa* maior;
- <= *que significa* menor ou igual;
- >= *que significa* maior ou igual.

Nas **desigualdades**, o objetivo é obter um conjunto de números (a solução do problema, o subconjunto de R) que tornam verdadeira a respectiva desigualdade.
Podemos, simplesmente, transformar a equação anterior numa inequação introduzindo um dos quatro sinais acima referidos. A título de exemplo:

2x+4 <=20.

Ao observar este exercício, o aluno deverá, novamente, perguntar-se "qual ou quais os números reais que tornam verdadeira a desigualdade? Para responder a esta questão, resolve-se a inequação. Resolução:

2x+4<=20 $\Leftrightarrow$

2x<=20-4 $\Leftrightarrow$

2x<=16 $\Leftrightarrow$

x<=8.

Ou seja, qualquer número menor ou igual a 8 valores torna verdadeira a desigualdade, sendo por isso parte da solução do exercício. A solução, sob a forma de intervalo, seria apresentada como **S=]- oo, 8]**.

E se a inequação a resolver for do tipo (x+3)/(x+8)>9.
Como resolver esta equação? Sugere-se a adopção de um método robusto, em que se utiliza um quadro onde se pesquisam os sinais (positivos e negativos) da função. Para chegar a esse quadro, deve-se efectuar as manipulações matemáticas necessárias e válidas para no membro direito da inequação apareça o número zero. O zero tem uma característica bastante particular: é o número real que separa os números positivos dos números negativos. Ou seja, se inequação ficar na forma:

Membro do lado esquerdo >0 significa que o membro do lado esquerdo é positivo ou pelo que se deve procurar o subconjunto de ***R*** para o qual o "sinal mais" surge no quadro.

3. Funções e equações.

3.1. Funções e equações lineares.

3.1.1. Equações lineares.

Como um caso particular dos vários tipos de equações, existe o grupo das equações lineares, cuja equação genérica pode ser representada por:

y = m*x + b, em que m e b são constantes (números reais).

Este grupo de equações representa, em termos gráficos, a equação de uma reta, em que m é o declive e b a ordenada na origem.

3.1.2. Funções.

<u>Um dos conceitos mais importantes da matemática é o conceito de função.</u>

E o que é uma função?

É uma lei de transformação. E transforma o quê? Transforma números noutros números. Ou seja, a um determinado número faz-se corresponder um outro número.

Ao "número de partida" costuma chamar-se original ou objeto, e ao número que é o seu correspondente costuma chamar-se a imagem.

Se se juntar, num saco, todos os originais, formamos um conjunto de números. Se se juntar, noutro saco, as imagens, formamos um outro conjunto de números.

Conforme já referido anteriormente, nas unidades curriculares de "Matemática" trabalha-se com números reais: o conjunto ***R***.

A figura seguinte ilustra o aspecto de uma função (usando o diagrama de balões).

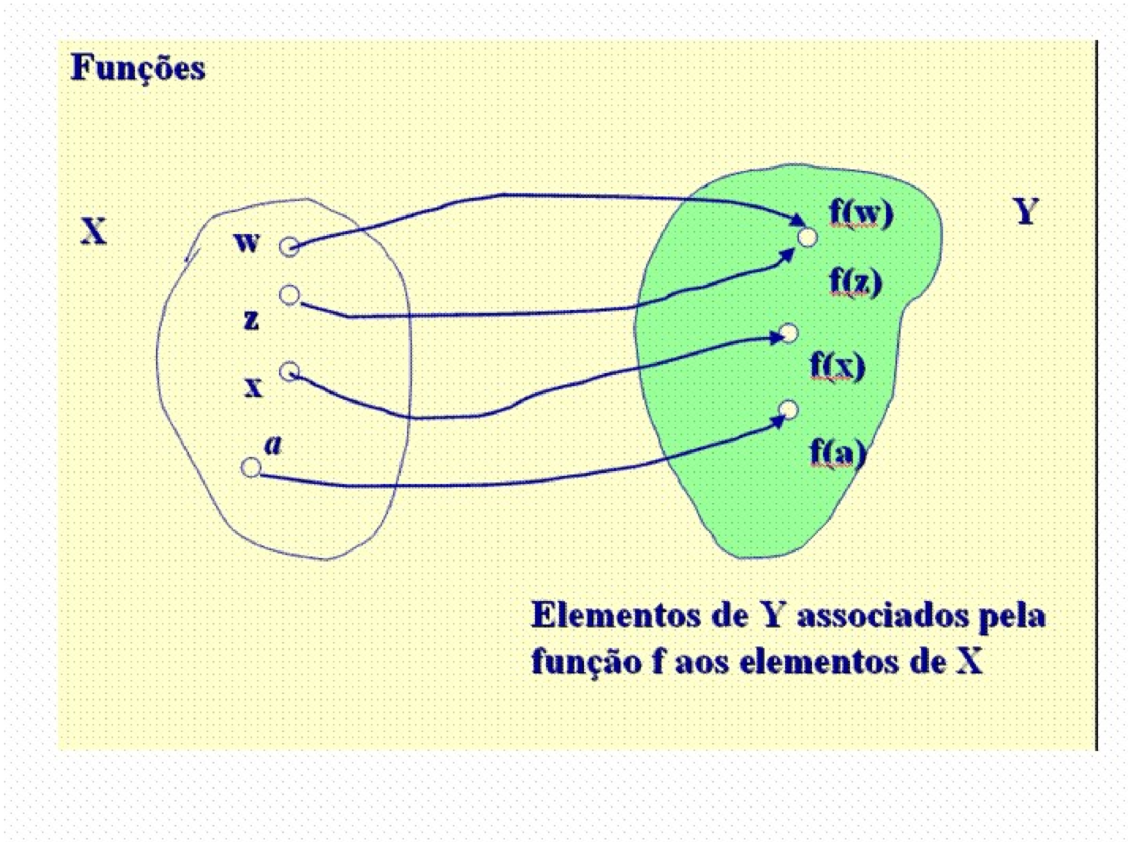

Figura 1 – Representação esquemática do conceito de função.

MUITO IMPORTANTE: a cada número "de partida" (balão do lado esquerdo) só pode corresponder um e um só número do segundo conjunto (balão do lado direito), para que essa lei de transformação possa ser chamada de função.

3.2. Domínios e zeros de funções reais de variável real.

3.2.1. Domínio de uma função.

Ao conjunto de números que contém todos os originais de uma função chama-se domínio de uma função. Representa-se, simbolicamente, por ***Df***.

Ao conjunto de números constituído por todas as imagens chama-se contradomínio de uma função, e representa-se por ***D'f***.

De acordo com o ponto anterior (3.1), a um original apenas pode corresponder uma imagem. Mas, dois originais diferentes podem ter a mesma imagem. O que importa, para ser função, é que cada original tenha apenas uma imagem. Se ela é igual à imagem de outro original, a lei de transformação continua a poder a ser classificada como uma função.

Os originais costumam ser representados pela letra x, enquanto as imagens pela letra y. Assim, $y=f(x)$. Nesta notação simbólica, observa-se a transformação do número x no número y através da função f.

Existindo uma função f(x), a determinação do domínio implica sempre a verificação da possibilidade de todos os números reais poderem, segundo essa função, ter a correspondente imagem. É nesta ideia basilar que se deve efetuar o cálculo. Ou seja, um número só pode pertencer ao domínio de uma função se, através da lei de transformação, tenha dado surgido um outro número.

No cálculo do domínio, há que ter em atenção alguns casos particulares importantes:

- uma função com denominador. Neste caso, a condição a colocar no cálculo do domínio é que o denominador tem que ser diferente de zero;
- uma função com uma raiz. Neste caso, há que ter o conhecimento de que se a raiz for de índice ímpar pode ser sempre calculada, não havendo qualquer problema ou restrição no cálculo do domínio. Se a raiz for de índice par, a condição a considerar, no cálculo do domínio, é que o que "está debaixo da raiz" tem que ser maior ou igual a zero.

Se aparecer uma raiz no denominador, deverão ser analisadas as duas situações em simultâneo.

3.2.2. Zero de uma função.

É um conceito muito simples: o zero de uma função é o original cuja imagem é o número zero. Por isso, surge a equação y = 0, ou seja, f(x) = 0.

A **ficha nº 3** possibilita ao aluno a prática dos conceitos abordados neste ponto.

3.3. Funções polinomiais e funções quadráticas.

Seja a seguinte função, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots a_n$

Esta função é um polinómio de grau n. É uma função polinomial. Os "a" são os coeficientes do polinómio e são números reais.

Se n=2, o polinómio fica $f(x) = a_0x^2 + a_1x^1 + a_2$

Esta função é um polinómio do 2ºgrau ou também designado por função quadrática.

Para achar as raízes ou zeros de uma função quadrática pode ser utilizada a fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Um exemplo concreto de um polinómio do 2ºgrau: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Exercício 1: Determine as raízes de f(x) = x^2-3x+2.

Resposta: x=2 ou x=1.

3.4. Decomposição de polinómios.

O interessante deste processo de determinação de raízes de um polinómio do 2ºgrau, é que x^2-3x+2 pode ser escrito como sendo (x-2)(x-1). Ou seja, x^2-3x+2 = (x-2)(x-1). Verifique.

Um polinómio de qualquer grau pode ser igual ao produto de um conjunto de fatores que incluem as raízes ou zeros do mesmo. Ou seja, pode ser decomposto num produto de fatores !

Por exemplo, 10 = 5*2. Ou seja, 10 é igual ao produto de 5 vezes 2. São dois fatores.

Por outro lado, também se pode escrever que 5 = 10/2. Ou seja, um deles obtido através de uma divisão. São os mesmos três números.

O mesmo raciocínio pode ser efetuado com polinómios. No caso do exemplo acima, por exemplo,

$x-1=(x^2-3x+2)/(x-2)$.

Ou seja, através de uma divisão de dois polinómios também é possível proceder a uma decomposição do polinómio.

Se se souber uma das raízes do polinómio, ou seja, o fator (x- raiz), é possível utilizar uma divisão para ajudar a decompor o polinómio.

Observe a divisão seguinte:

$$
\begin{array}{l|l}
\cdots x^2+x-6 & \underline{x+3} \\
\underline{-\left(x^2+3x\right)} & x-2 \\
\underline{\cdots 0-2x-6} & \\
\underline{-\cdots(-2x-6)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Como se sabe, o dividendo é igual ao divisor vezes o quociente mais o resto.

Ou seja, e no caso concreto, $x^2+x-6=(x+3)(x-2)+0=(x+3)(x-2)$

O polinómio foi decomposto !

- -

3.5. Funções exponencial e logarítmica.

Recorde que:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

3.5.1. Função exponencial.

É uma lei de transformação do tipo $f(x)=a^x$, em que

a - nº real constante e positivo e é a base da função exponencial

A função exponencial f(x) é sempre positiva (ou seja, o contradomínio é um conjunto de nº positivos).

Bases mais usadas:

- *a = 1;*
- *a = e* (função exponencial natural).

Em função dos valores numéricos para a base "a", existem dois tipos de gráficos, conforme se pode observar pela figura seguinte.

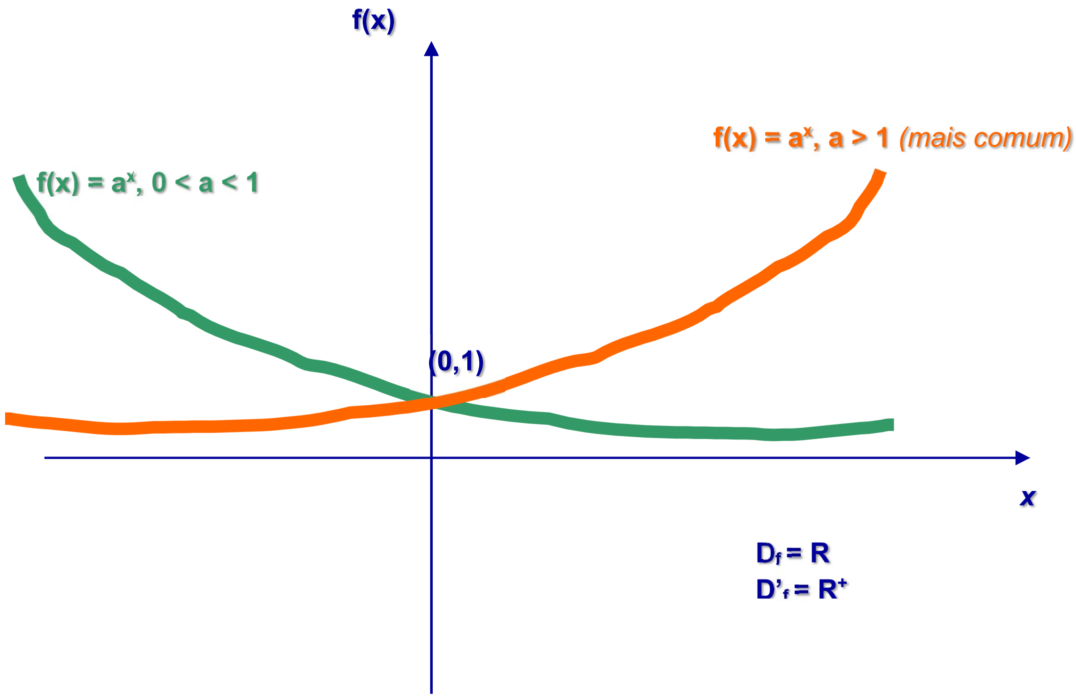

Figura 2 – Aspeto gráfico da função exponencial.

3.5.2. Função logarítmica.

A função logarítmica é a função inversa da função exponencial. Ou seja, os números existentes no par (original, imagem) que representa todos os pontos da linha do gráfico da função, vão trocar de posição quando se passa para a função inversa.

Por exemplo, na função exponencial (ver gráfico anterior), qualquer que seja a base, para o original zero a imagem é o número um. O ponto no gráfico é (0,1). Pela informação acima, no gráfico da função logarítmica irá aparecer o ponto (1,0), qualquer que seja a base.

Simbologia associada à função logarítmica de base *a:*

$f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Df = R^+ (contradomínio da função exponencial)

Considerando a informação acima, surge a seguinte definição de logaritmo de um número:

<u>Logaritmo de um nº positivo *x* na base *a* é o número (*y*) a que se deve elevar a base para obter *x.*</u>

Em termos matemáticos,

$$f(x) = y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

Propriedades operatórias dos logarítmos

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall\, x, y \in \Re^+, \forall\, a \in \Re^+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y \qquad \forall\, x, y \in \Re^+, \forall\, a \in \Re^+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a x^p = p \log_a x \qquad \forall\, p \in \Re, \forall\, x \in \Re^+, \forall\, a \in \Re^+ \setminus \{1\}$$

$$\log_b x = \log_a x * \log_b a \qquad \forall\, x \in \Re^+, \forall\, a, \mathrm{b} \in \Re^+ \setminus \{1\}$$

O gráfico correspondente à função logarítmica é apresentado na figura seguinte.

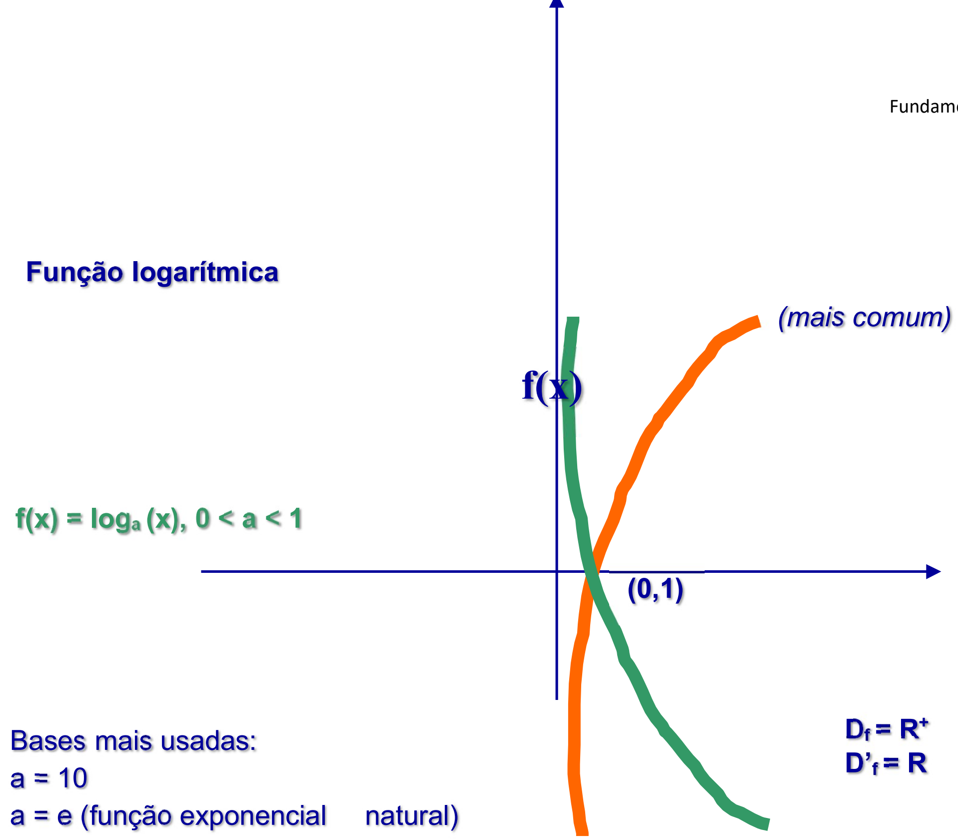

Figura 3 – Aspeto gráfico da função logarítmica.

Um possível exercício associado a estas funções é:

$y = \log_{10}(1000)$

Qual é o valor do y?

A resposta é y=3, pois 3 é o número a que se deve elevar a base para obter o número 1000.

Acrescenta-se que neste exemplo concreto, e para a função logarítmica apresentada, o original é o número 1000, a sua imagem é o número 3, sendo o ponto do gráfico (1000, 3).

Bibliografia

Ayres, F. & Mendelson, E. (2000). *Cálculo*. Edições McGraw-Hill (Schaum's easy outlines). ISBN 972-773-091-4. (Cota da biblioteca da UFP: CDU 517.2).

Lages, D. J. S. & Lages, M. A. (1998). *Funções 1 - Matemática 10ºano –– Fichas resolvidas*. Edições Silabo. ISBN: 978-972-618-175-0.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Edwards, B. H. (2006). *Cálculo – Volume 1*. Edições McGraw Hill. ISBN: 978-858-680-456-4 (Cota da biblioteca da UFP: CDU 517).

Safier, F. (2003). *Teorias e problemas do pré-cálculo*. Coleção Schaum, Bookman. ISBN: 853-630-181-3 (Cota da biblioteca da UFP: CDU 517 510.22 519.879).

Schmidt, P.A. & Ayres, F. (2006). *Teoria e problemas de matemática para ensino superior.* Coleção Schaum, Bookman. ISBN: 853-630-340-9. (Cota da biblioteca da UFP: CDU 51).